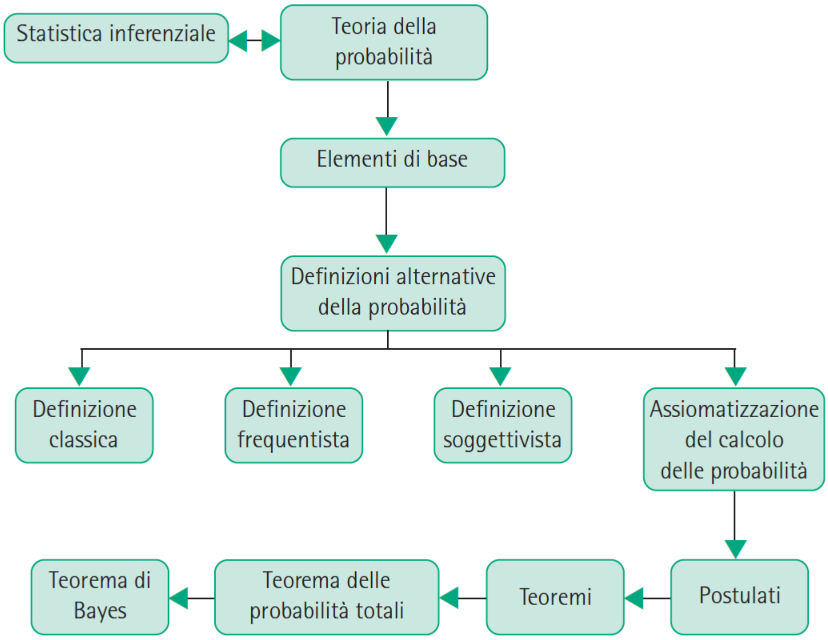
7. TEORIA DELLA PROBABILITÀ



1) EVENTO CASUALE

I problemi riguardanti gli eventi o accadimenti *casuali* (o *probabilistici*, o *non deterministici*, o *stocastici*) hanno sempre destato un grande interesse nei matematici in particolare, e in tutta l'umanità in generale. A tale interesse però non sempre ha corrisposto chiarezza nell'impostazione dell'analisi dei problemi (prova ne sia la grande ricchezza di termini sinonimi coinvolti nella definizione della probabilità), nonostante il forte contenuto intuitivo di tali problemi. Proprio basandoci su tale contenuto possiamo prendere le mosse da una definizione (non rigorosa): un **evento** si dice **casuale** se il suo esito non è caratterizzato da alcuna regolarità o prevedibilità.

2) GLI ELEMENTI DI BASE

La costruzione di una teoria rigorosa della probabilità richiede la definizione degli oggetti di base della teoria:

— **prova** è un qualsiasi esperimento i cui esiti siano osservabili e registrabili;
— **esito** è uno dei possibili risultati di una prova;
— **spazio campione** è l'insieme dei possibili esiti di una prova;
— **punti campione** sono gli elementi atomici dello spazio campione; — **evento** è un qualsiasi sottoinsieme dello spazio campione;
— **evento elementare** è un evento costituito da un solo punto campione.

Esempio

Applichiamo tali definizioni ad una prova (casuale) ben conosciuta: il lancio di un dado non truccato.

In questo caso:
— la prova è, per l'appunto, il lancio del dado;
— un esito è dato dal numero rappresentato sulla faccia in alto del dado dopo il lancio;
— lo spazio campione è dato dall'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

— i punti campione sono gli elementi 1, 2, 3, 4, 5 e 6;
— un evento è dato dalla situazione {*esce un numero pari*} corrispondente al sottoinsieme $A = \{2,4,6\}$, oppure dalla situazione {*esce un numero> 4*} corrispondente al sottoinsieme $B = \{5,6\}$;
— un evento elementare è rappresentato dalla situazione {*esce il numero 3*}, corrispondente al sottoinsieme $C = (3)$.

Come casi particolari di eventi vanno ricordati l'insieme **vuoto** ∅, cioè l'insieme che non è costituito da alcun elemento, e lo stesso spazio campione *S*.

3) DEFINIZIONI ALTERNATIVE DELLA PROBABILITÀ

Nonostante sia un concetto primitivo, la **probabilità** ha ricevuto nel tempo definizioni diverse, le quali, a dispetto del forte contenuto intuitivo, e quindi della loro plausibilità, presentano rilevanti inadeguatezze, almeno dal punto di vista del rigore scientifico.
Di seguito diamo tre definizioni di probabilità: *classica*, *frequentista*, *soggettivista*.

DEFINIZIONE CLASSICA

La **definizione classica** della probabilità è la seguente:

Sia dato un esperimento e un evento E tra i possibili eventi risultanti dall'esperimento, sia m il numero dei possibili risultati che danno luogo all'evento E, e n il numero di tutti i possibili risultati dell'esperimento allora, la probabilità dell'evento E, purché gli n risultati possibili siano tutti ugualmente possibili è, in simboli:

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

La probabilità di un qualsiasi evento *E* è sempre un numero tale che:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Assume valore estremo 0 quando il numero dei casi favorevoli all'evento è pari a 0, in tal caso l'evento è **impossibile**, mentre assume valore estremo 1 quando il numero dei casi favorevoli coincide con il numero dei casi possibili, in tal caso l'evento è **certo**.

DEFINIZIONE FREQUENTISTA

La **definizione frequentista** di probabilità di un evento stabilisce una relazione tra il concetto di frequenza e quello di probabilità, la prima calcolata dopo avere effettuato l'esperimento (a posteriori), la seconda definita prima dell'esperimento (a priori). Essa può essere espressa nella forma seguente:

Sia dato un esperimento perfettamente ripetibile e un evento E tra i possibili eventi risultanti dall'esperimento, sia $fr_n(E)$, la frequenza assoluta di E, ossia il numero di volte in cui si è verificato E in una serie di n esperimenti ripetuti nelle medesime condizioni, allora la probabilità dell'evento E è il limite cui tende la frequenza relativa dell'evento E quando il numero delle prove n tende all'infinito; in simboli:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{fr_n(E)}{n}$$

La probabilità di un evento si definisce ricorrendo alla **legge dei grandi numeri** o **legge empirica del caso** per la quale, effettuando un gran numero di prove nelle medesime condizioni, il valore della frequenza si approssima al valore della probabilità, e l'approssimazione migliora al crescere del numero delle prove.
La definizione trova applicazione nel campo delle assicurazioni in relazione agli eventi attinenti alla vita umana studiati nei confronti di una collettività, in cui particolare importanza hanno le frequenze calcolate per la sopravvivenza e la mortalità di individui per diverse fasce di età. In base alla definizione frequentista della probabilità e alla legge empirica del caso, le frequenze suddette sono assimilate alla probabilità di sopravvivenza e di mortalità.
La definizione esposta sebbene sia di tipo più concreto della precedente, necessita di un numero infinito di prove per essere effettivamente una definizione. Ora, poiché, in ambiti normali non è dato ad uno sperimentatore umano di ripetere infinite volte una prova, anche la seconda definizione non è adeguata.
Essa necessita che le successive prove si svolgano nelle medesime condizioni: condizione di ripetibilità dell'esperimento.

DEFINIZIONE SOGGETTIVISTA

La **definizione soggettivista** della probabilità esprime il grado di fiducia che un individuo coerente, sulla base delle informazioni di cui dispone, attribuisce al verificarsi di un evento. Essa è espressa nella forma seguente:

Sia dato un esperimento e sia E un evento tra i possibili eventi risultanti dall'esperimento, allora la probabilità dell'evento E è la somma che un individuo coerente è disposto a scommettere in un gioco equo in cui, se si verifica E, egli riceve un importo unitario.

In altri termini, la probabilità di *E* rappresenta la disponibilità di un individuo a pagare, in quanto equa, la quota di una scommessa, per riscuotere, se si verifica *E* un importo unitario e se non si verifica *E* un importo nullo.

4) ASSIOMATIZZAZIONE DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Le considerazioni sull'inadeguatezza delle due definizioni precedenti, pur pienamente accettate dal senso comune, portarono i matematici ad un notevole sforzo di ricerca e di fondazione teorica sfociato, almeno nella sua versione più conosciuta, nel lavoro di A.N. Kolmorogov (1933), di cui esprimiamo i **postulati**.

1. La probabilità di un evento E è un numero decimale **non negativo** e **minore o uguale a 1**:

$$P(E) \leq 1$$

2. La probabilità dell'evento corrispondente allo spazio campione ($P(S)$) è:

$$P(S) = 1$$

3. Se due eventi A e B non hanno eventi elementari in comune, se cioè sono disgiunti, risulta:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dei tre postulati senza dubbio l'ultimo è quello che ha le conseguenze pratiche più rilevanti. Se si considera un evento non elementare, costituito cioè da più eventi elementari, è facile risalire alla probabilità dell'evento non elementare (detto anche **evento composto**) partendo dalla probabilità degli eventi elementari che lo costituiscono, i quali, proprio per il loro essere elementari, sono per forza di cose disgiunti.

Esempio

Nel caso del lancio di un dado, l'evento $A = \{esce\ un\ numero\ pari\} = \{2,4,6\}$ è:
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$.
Come ulteriore applicazione del terzo postulato, calcoliamo la probabilità che esca un numero qualsiasi lanciando un dado (probabilità che, secondo l'impostazione classica, sappiamo essere uguale a 1/6). Essendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e risultando gli eventi elementari equiprobabili abbiamo $P(S) = 1$, $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = p + p + p + p + p + p = 6p$ da cui $p = 1/6$, in accordo con la definizione classica.

Dalla definizione assiomatica di probabilità discendono alcuni teoremi:

TEOREMI

Teorema 1: per qualsiasi evento **E**, risulta:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E})$$

dove $\overline{E}$ è la negazione o complemento dell'evento E.

Teorema 2: per qualsiasi coppia di eventi **A** e **B**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

dove con $A \cup B$ si indica l'evento unione dei due eventi e con $A \cap B$ si indica l'evento intersezione dei due eventi.

Teorema 3: per qualsiasi coppia di eventi **A** e **B**:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A/B)$$

Il secondo teorema non è altro che un'estensione del terzo assioma sulla probabilità ai casi in cui i due (o più) eventi non siano disgiunti. In tutti questi casi è infatti necessario togliere la probabilità dell'intersezione dei due eventi, al fine di non contare due volte gli eventi elementari che si trovano nell'insieme *A* e nell'insieme *B* (e quindi nella loro intersezione).
Il terzo teorema, detto della **probabilità condizionata**, necessita di un'ulteriore considerazione. Tale regola si riferisce ai casi in cui, dati due eventi, il verificarsi del primo può in qualche modo condizionare il verificarsi del secondo. La probabilità che si verifichino l'evento *A* e l'evento *B* è uguale alla probabilità dell'evento *A* moltiplicata per la probabilità che si verifichi l'evento *B dato che si è verificato l'evento A* (l'espressione *B/A* sta a significare proprio il verificarsi di *B dato che* si è verificato *A*).

Un'importante conseguenza del terzo teorema è data dalla possibilità di riscriverla sotto forma di frazione:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

In questa forma, la regola della probabilità condizionata consente di determinare proprio la probabilità condizionata partendo dalla probabilità dell'evento congiunto.
Si può introdurre, infine, il concetto di eventi indipendenti.

Tale concetto, dal contenuto piuttosto intuitivo, può essere espresso in forma rigorosa dicendo che *A* e *B* sono **indipendenti** se risulta:

$$P(B/A) = P(B)$$

5) TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

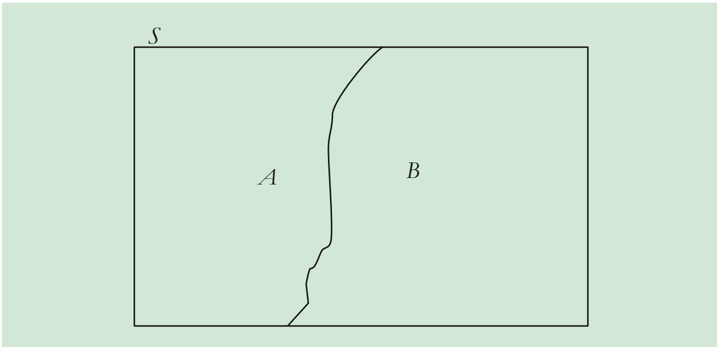
Prima di definire il *teorema delle probabilità totali* occorre premettere alcuni concetti.

— Se $A \cap B = \emptyset$, allora si dice che A e B sono **incompatibili** o **mutuamente esclusivi**.

— Due eventi A e B si dicono, invece, **necessari** se la loro unione è l'evento certo; in simboli:

$$A \cup B = S$$

La rappresentazione grafica dei due eventi è la seguente:



(Fig. 1)

Una raccolta di *eventi necessari e incompatibili* E_i si dice una **partizione di *S***, che è tale se e solo se:

— la loro unione è l'evento certo, ossia $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$;

— sono incompatibili a due a due, ossia $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Siano $E_1, E_2, \ldots,$ eventi mutuamente incompatibili che costituiscono una partizione di S, per ogni evento $A \subset S$, si ha:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A|E_i)$$

6) IL TEOREMA DI BAYES

Dal teorema delle probabilità totali si trae il **teorema di Bayes** che consente di calcolare la probabilità che, essendosi verificato un evento, abbia agito una data causa in un gruppo di cause incompatibili ed esaustive.

Se $H_1, H_2, \ldots, H_m$ sono eventi che costituiscono una partizione di S, allora, per qualunque evento $E \subset S$, la probabilità di H_i dato E è:

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i) P(E|H_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(H_j) P(E|H_j)} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

Nella formula del teorema di Bayes intervengono:

— le **probabilità a posteriori** $P(H_i \mid E)$ dell'ipotesi H_i dato l'effetto E;
— le **probabilità a priori** $P(H_i)$ che hanno le singole ipotesi di verificarsi;
— le **verosimiglianze** o **probabilità probative** $P(E \mid H_i)$ che l'effetto sia stato causato da una data ipotesi.